# Etude d'une fonction

1. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t \neq 0, f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$.

1.a Justifier que $f$ est continue et paire.

1.b Former le développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de 0.
Par quelle valeur peut-on prolonger $f$ par continuité en 0 ?
Désormais $f$ désigne la fonction obtenue par ce prolongement.

1.c Justifier que $f$ est dérivable en 0, donner $f'(0)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

1.d Justifier que $f$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

1.e A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \dfrac{w^2}{(1+w^2)^2}\mathrm{d}w = -\dfrac{1}{2}t^2 f'(t)$.

En déduire le sens de variation de $f$.

1.f Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé (unité : 2 cm)
(on ne demande pas l'étude des points d'inflexion)

2. Soit $\phi$ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \neq 0, \phi(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

2.a Former le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\phi$.
Par quelle valeur peut-on prolonger $\phi$ par continuité en 0 ?
Désormais $\phi$ désigne la fonction obtenue par ce prolongement.

2.b Montrer que $\phi$ est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\phi'(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi'(x) = \dfrac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$.

2.c Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$
(on pourra commencer par supposer $x > 0$).

2.d En déduire les variations de $\phi$.

2.e Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 0$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

2.f Tracer la courbe représentative de $\phi$ dans le même repère que celle de $f$.

3. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \phi(u_n)$, où $\phi$ est l'application du 2.

3.a Montrer que : $\forall t \geq 0, 0 \leq \dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

3.b Montrer que, pour tout $x$ strictement positif : $\left|\phi'(x)\right| \leq \dfrac{1}{x}(1 - f(x)) = \dfrac{1}{x^2}\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$
(on pourra utiliser 2.b et 2c.)

3.c En déduire que, pour tout $x$ strictement positif : $\left|\phi'(x)\right| \leq \dfrac{1}{4}$, et que cette inégalité reste vérifiée pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

3.d Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = x$ admet une unique solution. On note $\alpha$ cette solution.
Montrer que $\alpha \in ]0,1]$.

3.e Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{4}\left|u_n - \alpha\right|$.

En déduire que $(u_n)$ est convergente, et préciser sa limite.

4. On considère l'équation différentielle : $x^2 y' + xy = \arctan(x)$.

4.a Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

4.b Montrer que $\phi$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

# Correction

Mines de Sup 2002

1.a $f$ est continue par opérations sur les fonctions continues et paire par rapport de fonctions impaires.

1.b $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ donc $f(t) = 1 - \frac{1}{3}t^2 + o(t^2)$.

On prolonge $f$ par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$.

1.c Puisque $f$ admet un $DL_1(0)$, $f$ est dérivable et $f'(0) = 0$.

La tangente en 0 est la droite d'équation $y = 1$.

$f(t) - 1 \sim -\frac{1}{3}t^2 + o(t^2) < 0$, la courbe est donc en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

1.d $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivable et $f'(t) = \frac{t - (1+t^2)\arctan t}{(1+t^2)t^2}$.

1.e $\int_0^t \frac{w^2 \mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} = \int_0^t w \frac{w}{(1+w^2)^2} \mathrm{d}w = \left[ -\frac{1}{2}\frac{w}{1+w^2} \right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = -\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\arctan t = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$.

Pour $t > 0$, on a $\int_0^t \frac{w^2 \mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

Pour $t < 0$, on a $\int_0^t \frac{w^2 \mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} < 0$ donc $f'(t) < 0$.

Par suite $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

1.f Ci-dessus.

2.a $f(t) = 1 - \frac{1}{3}t^2 + o(t^2)$ donc $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x - \frac{1}{9}x^3 + o(x^3)$ puis $\phi(x) = 1 - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$.

On prolonge $\phi$ par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$.

2.b $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ car $f$ est paire. Par suite $\phi(-x) = \phi(x)$. Ainsi $\phi$ est paire.

D'après le $DL(0)$ de $\phi$, $\phi$ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 0$.

Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $f(x)$, donc par opérations, $\phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}*$ et

$\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$.

2.c Soit $x > 0$ :

$\forall t \in [0, x]$, on a $f(x) \leq f(t) \leq 1$ car $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite $xf(x) \leq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leq x$ puis $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$.

Pour $x = 0$ : il y a égalité.

Pour $x < 0$ : la double inégalité s'obtient par la parité des fonctions engagées.

2.d $\phi'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\phi'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^-$ donc $\phi$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

2.e $\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\pi/2}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln x}{2x} \to 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 0$.

$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \to 0$ par opérations.

2.f sous-traiter à la calculette

3.a D'une part $\frac{t}{1+t^2} \geq 0$ car $t \geq 0$ et $1 + t^2 > 0$.

D'autre part $(1-t)^2 \geq 0$ donc $2t \leq (1+t^2)$ puis $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

3.b Pour $x>0$ : $\left|\phi'(x)\right| = -\phi'(x) = \frac{1}{x}\left(\phi(x)-f(x)\right) \leq \frac{1}{x}\left(1-f(x)\right)$ car $\phi(x)\leq 1$.

et $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^x 1-\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\arctan x = \frac{1}{x}\left(1-f(x)\right)$.

3.c $\left|\phi'(x)\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.

Cette inégalité est aussi vraie pour $x=0$ (car $\phi'(0)=0$) et pour $x<0$ (car $\phi'$ est impaire)

3.d Soit $h : x \mapsto x-\phi(x)$. $h$ est dérivable et $h'(x) = 1-\phi'(x) \geq 3/4 > 0$ donc $h$ est strictement croissante.
$h$ est continue, strictement croissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ (par opérations) donc $h$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Par suite l'équation $h(x)=0$ (i.e. $\phi(x)=x$) admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$. De plus $h(0) = -\phi(0) = -1$ et $h(1) = 1-\phi(1) \geq 0$ (car $\phi(x)\leq 1$), donc $\alpha \in ]0,1]$.

3.e $\left|u_{n+1}-\alpha\right| = \left|\phi(u_n)-\phi(\alpha)\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n-\alpha\right|$ en vertu de l'IAF.

Par récurrence : $\left|u_n-\alpha\right| \leq \frac{1}{4^n}\left|u_0-\alpha\right|$ donc $\left|u_n-\alpha\right| \to 0$ i.e. $u_n \to \alpha$.

4.a C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Sur $I = ]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$, $x^2y'+xy = \arctan x \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{\arctan x}{x^2}$.

$y' + \frac{1}{x}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x}y$, solution homogène $y_0(x) = \frac{C}{x}$.

$y_1(x) = \phi(x)$ est solution particulière.

Solution générale sur $I$ : $y(x) = \phi(x) + \frac{C}{x}$.

4.b $\phi$ est solution sur l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Inversement soit $y$ une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

Il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x>0, y(x) = \phi(x) + \frac{C^+}{x}$ et $\forall x<0, y(x) = \phi(x) + \frac{C^-}{x}$.

Quand $x\to 0^+$, $y(x) \to \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^+ \neq 0 \\ 1 \text{ si } C^+ = 0 \end{cases}$ et quand $x\to 0^-$, $y(x) \to \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^- \neq 0 \\ 1 \text{ si } C^- = 0 \end{cases}$.

Or $y$ est définie et continue en 0 donc $C^+ = C^- = 0$, $y(0) = 1$ puis $y = \phi$.

Finalement $\phi$ est la seule solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.